

Оствальдове визрівання виділень малих розмірів, розташованих на міжзеренній межі, ріст яких лімітується дифузією

О.В. Коропов*

Інститут прикладної фізики НАН України, вул. Петропавлівська, 58, 40000, Суми, Україна

(Одержано 12.07.2012; у відредагованій формі – 30.09.2012; опубліковано online 29.10.2012)

Теоретично розглянуто оствальдове визрівання двовимірних виділень нової фази малих розмірів, розташованих на міжзеренній межі скінченної товщини, з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна до міжзеренної межі. Вважається, що ріст виділень лімітується дифузією атомів домішки в міжзеренній межі. Знайдено асимптотичні часові залежності середнього і критичного радіусів виділення, пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі, функції розподілу виділень за розмірами, густини виділень, коефіцієнта заповнення міжзеренної межі виділеннями. Обговорюються границі застосування проведеного розгляду.

Ключові слова: Пересичені тверді розчини, Дифузійний розпад, Виділення нової фази, Оствальдове визрівання, Реальні кристали, Макродефекти, Межі зерен, Старіючі металеві стопи, Реакторні конструкційні матеріали, Радіаційна стійкість, Дифузійний ріст, Вакансійні пори.

PACS numbers: 61.72. – y, 64.70.Kb, 66.30.Jt, 68.35. – p, 81.10.Jt, 81.30.Mh

1. ВСТУП

В процесі дифузійного розпаду пересиченого твердого розчину, що відбувається шляхом флюктуативного утворення і наступного росту дискретних областей (центрів) нової фази (зародків нової фази), розрізняють три стадії [1-9]. На початковій стадії розпаду, коли пересичення твердого розчину атомами домішки достатньо велике, відбувається інтенсивне утворення життєздатних зародків нової фази з розмірами більше критичного (надкритичних зародків). На початковій стадії кількість атомів домішки в зародках ще мала в порівнянні з кількістю, що міститься в твердому розчині, а пересичення твердого розчину ще не встигає помітно упасти.

На другій стадії кількість атомів домішки в зародках порівнянна з тою, що міститься в твердому розчині; при цьому пересичення починає спадати. На цій стадії число зародків змінюється слабо, а частка нової фази зростає головним чином за рахунок росту уже наявних життєздатних зародків.

Третю, більш пізню, стадію дифузійного розпаду було відкрито Оствальдом у 1900 р. [10]. На цій стадії пересичення стає дуже малим, і флюктуативне утворення нових зародків практично не відбувається, бо вони мають макроскопічно великі розміри. Збільшення критичного розміру зародка, пов'язане зі зменшенням пересичення розчину, призводить до того, що менші із центрів нової фази, які утворилися, переходять в підкритичну область розмірів і розчиняються. Отже, визначальну роль відіграє процес росту більш крупних виділень за рахунок зменшення в розмірі і зникнення дрібних; при цьому середній розмір виділення монотонно збільшується з часом. Цю стадію звичайно називають оствальдовим визріванням (ОВ) виділень нової фази. Альтернативний термін «коалесценція» в теперішній час застосовується рідше. Основи послідовної і внутрішньо

несуперечної теорії ОВ були закладені в працях [11, 12], де вважається, що ріст виділень відбувається із самоузгодженого середнього поля густини атомів домішки, а безпосередньою дифузійною взаємодією виділень, розташованих на близьких відстанях одне від одного, можна знехтувати (виділення знаходяться достатньо далеко одне від одного).

В працях [6, 8, 11, 12] було показано, що на стадії ОВ кінетика макродефектів визначається тенденцією сумарної міжфазної поверхневої енергії до зменшення, законом збереження кількості атомів домішки, що містяться як у виділеннях нової фази, так і в твердому розчині, а також діючим в системі механізмом перенесення атомів домішки. В ідеальній (не містить дефекти) кристалічній матриці швидкість масоперенесення визначається або дифузією через об'єм матриці-кристалу [11], або кінетикою переходу і вбудовою атомів на межі матриця-виділення нової фази (межовою кінетикою) [12]. В реальному (що містить різні дефекти) кристалі кінетика макродефектів на стадії ОВ може визначатись дифузією по дислокаційних трубках [13-17], або дифузією по межах зерен (міжзеренних межах) полікристалів [18, 19]. Більшу кількість праць присвячено ОВ острівцевих структур на поверхні твердого тіла [20-27]. Розглядалися також ОВ пор, заповнених газом [28,29], ОВ багатокомпонентних виділень нової фази [8, 21], ОВ центрів кристалізації в кінетиці кристалізації розтопів [30] і ряд інших питань [3, 4, 31-35].

Важливу роль процесу дифузійного розпаду відіграють у матеріалознавстві, постаючи однією з причин старіння металевих стопів [36-40]. Зокрема, розпад твердого розчину в модифікованих аустенітних неіржавійних сталях (конструкційних матеріалах для реакторів на швидких нейтронах і реакторів майбутніх поколінь) призводить до утворення виділень G-фази ($M_6Ni_{16}Si_7$) і η -карбідів (M_6C), що суттє-

* ipfmail@ipfcentr.sumy.ua

во знижує радіаційну стійкість сталі на наступних стадіях еволюції її дефектної структури [38-40].

В даній роботі теоретично розглядається ОВ двовимірних виділень нової фази, розташованих на міжзеренній межі, що має скінченну товщину δ [41-44] з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна до міжзеренної межі. Як і в працях [45-51] вважається, що радіус виділень R малий в порівнянні з характерним масштабом довжини задачі L_B ($R \ll L_B$). Також вважається, що ріст виділень лімітується дифузією атомів домішки в міжзеренній межі, а не поверхневою кінетикою вбудови атомів домішки у виділення. Зауважимо, що раніше [18, 19] теоретично розглядалось ОВ тривимірних виділень нової фази, розташованих на міжзеренній межі, форма яких складається з двох сферичних сегментів однакового радіуса (див. рис. 4.23 в [19]). Ця робота є природним продовженням праць [49-51], в яких розглядалися дифузійний ріст і морфологічна стійкість відокремленого (ізолюваного) двовимірного виділення нової фази, розташованого на міжзеренній межі. Як і в працях [49-51], для визначеності будемо вести мову про тверді виділення нової фази, проте одержані далі формули застосовні і для випадку вакансійних пор, де роль атомів домішки відіграють вакансії. Останнє зауваження відноситься також до праць [49-51].

2. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ КІНЕТИКИ ОВ ВИДІЛЕНЬ, РОЗТАШОВАНИХ НА МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ

Як показано в працях [49, 50], швидкість дифузійного росту двовимірного виділення нової фази з радіусом основи $R = R(t)$ і висотою h , розташованого на міжзеренній межі, має вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D_B \omega \delta}{h L_B} \frac{K_1(R/L_B)}{F_0(R/L_B)} \Delta n_{BR} \quad (1)$$

(формула (20) праці [49]). Тут D_B – коефіцієнт міжзеренної дифузії, тобто об'ємний коефіцієнт дифузії атомів домішки в міжзеренній межі (шарі товщиною δ), ω – об'єм, що припадає на один атом домішки в виділенні, L_B – характерний масштаб довжини задачі (формула (12) праці [49]), $K(z)$ – функція Макдональда l -го порядку [52],

$$F_0(z) \equiv K_0(z) + \frac{D_B}{\beta_B L_B} K_1(z), \quad (2)$$

β_B – поверхневий кінетичний коефіцієнт, що характеризує швидкість переходу атомів домішки з міжзеренної межі до виділення нової фази, Δn_{BR} – термодинамічно рівноважний перепад густини атомів домішки в міжзеренній межі навколо виділення радіуса R (формула (17) праці [49]).

Далі будемо розглядати тільки випадок малих пересичень твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі

$$\Delta_B(t) \equiv \frac{\bar{n}_B(t) - n_{B\infty}}{n_{B\infty}} \ll 1. \quad (3)$$

Тут $\bar{n}_B(t)$ – густина атомів домішки в міжзеренній межі віддалік від виділення нової фази, $n_{B\infty}$ – термодинамічно рівноважне значення густини атомів домішки в міжзеренній межі поблизу плоскої поверхні міжзеренна межа-виділення нової фази ($R \rightarrow \infty$).

Для виділення малого радіуса ($R \ll L_B$) у випадку малих пересичень (3) формула (1) приймає вигляд

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\Gamma_B D_B n_{B\infty} \omega \delta}{h(K_0 R + D_B/\beta_B)} \left(\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} \right) \quad (4)$$

(формула (30) праці [49]). Тут $\Gamma_B \equiv \sigma_B \omega / KT$, σ_B – питома міжфазна енергія поверхні міжзеренна межа-виділення нової фази, K – стала Больцмана, T – температура,

$$K_0 \equiv K_0(R/L_B), \quad (5)$$

R^* – критичний радіус виділення нової фази (виділення з радіусом $R > R^*$ зростає, а з радіусом $R < R^*$ зменшується в розмірі). Зазначимо, що у випадку $R \ll L_B$

$$K_0(R/L_B) = -[\ln(R/2L_B) + \gamma] + O[(R/2L_B)^2 \ln(R/2L_B)], \quad (6)$$

де $\gamma = 0.5772 \dots$ стала Ейлера [52], тобто K_0 слабо (логарифмічно) залежить від R .

Якщо ріст малого виділення ($R \ll L_B$) лімітується дифузією атомів домішки ($D_B/\beta_B \rightarrow 0$), то з формули (4) одержимо

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\Gamma_B D_B n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0 R} \left(\frac{1}{R^*} - \frac{1}{R} \right) = \frac{D_B n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0 R} \left(\Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R} \right), \quad (7)$$

оскільки у випадку малих пересичень (3) має місце формула

$$\frac{\Gamma_B}{R^*} = \Delta_B \ll 1 \quad (8)$$

(перша з формул (29) праці [49]). Запроваджуючи позначення

$$D \equiv \frac{D_B n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0}, \quad (9)$$

остаточно вираз (7) для швидкості росту виділення dR/dt запишемо у вигляді

$$\frac{dR}{dt} = \frac{D}{R} \left(\Delta_B - \frac{\Gamma_B}{R} \right). \quad (10)$$

Зазначимо, що величина D має розмірність коефіцієнта дифузії і за умови нехтування залежністю K_0 від R є сталою при заданих умовах задачі.

В цій роботі будемо розглядати ансамбль виділень тільки малого розміру ($R \ll L_B$), ріст яких лімітується дифузією атомів домішки ($D_B/\beta_B \rightarrow 0$) в умовах малих пересичень твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі ($\Delta_B \ll 1$). В цьому випадку швидкість росту виділення має вигляд (7), (10).

В подальшому будемо користуватися безрозмірними величинами: радіусом виділення $\rho \equiv R/R_0^* = R \Delta_{B0}/\Gamma_B$ і часом $t' \equiv t/T_0$, де $R_0^* = R^*(t)|_{t=0}$

– початковий критичний радіус виділення, $\Delta_{B0} \equiv \Delta_B(t)|_{t=0}$ – початкове пересичення атомів домішки в міжзеренній межі, $T_0 \equiv R_0^{*3}/\Gamma_B D$ – характерний час задачі. Тоді, опускаючи штрих при t' , рівняння (10) запишемо у вигляді

$$\rho^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{x(t)} - 1, \quad (11)$$

де

$$x(t) \equiv R^*(t)/R_0^* = \Delta_{B0}/\Delta_B(t) \quad (12)$$

– безрозмірний критичний радіус виділення, що є шуканою величиною, $x(0) = 1$.

Нехай $f(\rho, t)$ – функція розподілу виділень нової фази за розмірами, нормована на щільність виділень (число виділень на одиницю площі міжзеренної ме-

жі), тобто так, що

$$N(t) = \int_0^\infty f(\rho, t) d\rho \quad (13)$$

є щільність виділень; $f(\rho, t)$ і $N(t)$ підлягають визначенню. Функція розподілу $f(\rho, t)$ задовольняє кінетичному рівнянню (рівняння неперервності в просторі розмірів) [11, 12]

$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left[f(\rho, t) \frac{d\rho}{dt} \right] = 0 \quad (14)$$

з заданою початковою функцією розподілу $f_0(\rho) \equiv f(\rho, t)|_{t=0}$ і рівнянню балансу речовини в системі (закону збереження речовини)

$$\bar{n}_{B0} \delta + \bar{n}_{V0} d + \frac{\pi \hbar}{\omega} R_0^{*2} \int_0^\infty \rho^2 f_0(\rho) d\rho = \bar{n}_B(t) \delta + \bar{n}_V(t) d + \frac{\pi \hbar}{\omega} R_0^{*2} \int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho, \quad (15)$$

де $\bar{n}_{B0} \equiv \bar{n}_B(t)|_{t=0}$, $\bar{n}_V(t)$ – густина атомів домішки в глибині зерна, $\bar{n}_{V0} \equiv \bar{n}_V(t)|_{t=0}$, d – характерний поперечний розмір зерна.

Зазначимо, що в законі збереження речовини (15) ураховуються атоми домішки, що знаходяться відповідно в твердих розчинах міжзеренної межі, тіла зерна і в виділеннях нової фази. Як і раніше [49, 50], будемо вважати, що віддалік від виділення нової фази існує термодинамічна рівновага між атомами домішки, які знаходяться в тілі зерна біля міжзеренної межі і атомами домішки в самій міжзеренній межі. Тоді

$$\bar{n}_V = C \bar{n}_B, \quad \bar{n}_{V0} = C \bar{n}_{B0} \quad (16)$$

(формула (10) праці [49]). З урахуванням співвідношень (16) закон збереження речовини (15) запишемо у вигляді

$$Q \equiv \Delta_{B0} + \kappa^* \int_0^\infty \rho^2 f_0(\rho) d\rho = \Delta_B(t) + \kappa^* \int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho, \quad (17)$$

де

$$\kappa^* \equiv \frac{\pi \hbar R_0^{*2}}{n_{B0} \omega (\delta + Cd)} \quad (18)$$

або у вигляді

$$\frac{\Delta_B(t)}{Q} + \kappa^* \int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho = 1. \quad (19)$$

Тут

$$\kappa \equiv \frac{\kappa^*}{Q} = \frac{\pi \hbar R_0^{*2}}{n_{B0} \omega (\delta + Cd)} \quad (20)$$

– стала, що характеризує дану систему. З урахуванням формули (12) маємо

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(t)} + \kappa^* \int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho = 1. \quad (21)$$

Отже, задача полягає в відшуванні асимптотичного (при $t \rightarrow \infty$) розв'язку рівнянь (11), (14) і (21) при заданій початковій умові $f(\rho, t)|_{t=0} = f_0(\rho)$.

3. АСИМПТОТИКИ ЗМІН КРИТИЧНОГО РАДІУСА ВИДІЛЕННЯ І ПЕРЕСИЧЕННЯ ТВЕРДОГО РОЗЧИНУ АТОМІВ ДОМІШКИ В МІЖЗЕРЕННІЙ МЕЖІ НА СТАДІЇ ОВ

Для розв'язку сформульованої задачі знайдемо спочатку асимптотику (при $t \rightarrow \infty$) зміни безрозмірного критичного радіуса виділення $x(t) = R^*(t)/R_0^*$, а разом з нею і асимптотику зміни пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі $\Delta_B(t) = \Delta_{B0}/x(t)$ (див. формулу (12)).

Дотримуючись праць [8, 11], в якості незалежної змінної в рівняннях (11), (14) і (21) виберемо не безрозмірний радіус виділення ρ , а відносний радіус (по відношенню до критичного)

$$u \equiv \frac{R}{R^*(t)} = \frac{R}{\Gamma_B} \Delta_B(t) = \frac{\rho}{x(t)}. \quad (22)$$

Оскільки при $t \rightarrow \infty$ пересичення $\Delta_B(t) \rightarrow 0$, то $x(t) \rightarrow \infty$; внаслідок цього величина $x(t)$ може бути використана для відліку часу [8, 11]. В якості змінної, що відіграє роль часу t , в даній роботі зручно вибрати величину

$$\tau \equiv \ln x^2 = \ln \left(\frac{R^*(t)}{R_0^*} \right)^2 = \ln \left(\frac{\Delta_{B0}}{\Delta_B(t)} \right)^2, \quad (23)$$

$$x^2(\tau) = \exp \tau. \quad (24)$$

Тоді в змінних u , τ рівняння (11) приймає вигляд

$$u^2 \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{2} [\gamma(u-1) - u^3], \quad (25)$$

де

$$\gamma = \gamma(\tau) \equiv \frac{dt}{x^2 dx} = \frac{3dt}{dx^3} > 0. \quad (26)$$

Якщо через $u(w, \tau)$ позначити розв'язок рівняння (25) при заданій початковій умові $u|_{\tau=0} = w$ і урахувати, що $\rho(w, \tau) = x(\tau)u(w, \tau)$ (див. (22)), $\tau|_{t=0} = 0$, $x|_{\tau=0} = 1$, то повне число атомів домішки у виділеннях всіх розмірів на одиниці площі міжзеренної межі

$$N_i(t) = \frac{\pi \hbar}{\omega} R_0^{*2} \int_0^\infty \rho^2 f(\rho, t) d\rho \quad (27)$$

може бути записаним через початкову функцію розподілу $f_0(w)$ у вигляді

$$N_i(t) = \frac{\pi \hbar}{\omega} R_0^{*2} x^2(\tau) \int_{w_0(\tau)}^\infty u^2(w, \tau) f_0(w) dw. \quad (28)$$

Тут $w_0(\tau)$ – розв'язок рівняння $u[w_0(\tau), \tau] = 0$, тобто нижня границя первісних радіусів виділень, не розчинених до моменту часу τ .

Ураховуючи формулу (27), запишемо закон збереження речовини (21) у вигляді

$$\frac{\Delta_{B0}}{Qx(t)} + \frac{\kappa \omega}{\pi \hbar R_0^{*2}} N_i(\tau) = 1 \quad (29)$$

або остаточно, з урахуванням формул (24) і (28)

$$1 - \frac{\Delta_{B0}}{Q} \exp(-\tau/2) = \kappa \exp(\tau) \int_{w_0(\tau)}^\infty u^2(w, \tau) f_0(w) dw. \quad (30)$$

В рівняннях (25) і (30) невідомою функцією є $\gamma(\tau) = dt/x^2 dx$ і вони повинні бути використані для її визначення, тобто в кінці кінців для знаходження критичного радіуса виділення $x(t)$ і пересичення $\Delta_B(t)$.

Аналіз рівнянь (25) і (30), аналогічний проведеному в працях [8, 11], вказує, що при достатньо великих значеннях часу τ

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 [1 - \varepsilon^2(\tau)], \quad (31)$$

де $\gamma_0 = \text{const}$, $\varepsilon(\tau) > 0$, $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Значення γ_0 визначається умовою дотику графіка швидкості $du^3/d\tau = 3u^2 du/d\tau$ як функції u осі абсцис:

$$\gamma(u-1) - u^3 = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial u} [\gamma(u-1) - u^3] = 0 \quad (33)$$

(див. рівняння (25)). З рівнянь (32), (33) знаходимо $\gamma_0 = 27/4$, абсциса точки дотику («запираюча» точка для точок, що рухаються справа наліво вздовж осі u) $u_0 = 3/2$. З формули (31) видно, що точки, які наближаються справа до u_0 , все повільніше проходять через «запираючу» точку $u_0 = 3/2$. Швидкість цього проходження визначається значенням $\varepsilon(\tau)$, котре, як і $\gamma(\tau)$, повинно бути знайдено з рівняння (30) і рівняння руху

(25):

$$u^2 \frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{2} \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 (u+3) - \frac{27}{8} \varepsilon^2(\tau) (u-1). \quad (34)$$

В околі точки $u_0 = 3/2$, тобто при $|u - u_0| \leq \varepsilon(\tau)$ швидкість $du/d\tau$ така

$$\frac{du}{dt} = -\left(u - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \varepsilon^2(\tau). \quad (35)$$

Впроваджуючи нову змінну $z \equiv (u - 3/2)/\varepsilon$ як відношення двох малих величин, запишемо рівняння (35) у формі

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{dz}{d\tau} = -z^2 - \frac{3}{4} + z \frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau}. \quad (36)$$

Позначимо

$$\alpha = \alpha(\tau) \equiv \frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d\varepsilon}{d\tau} > 0. \quad (37)$$

Тоді рівняння (36) приймає вигляд

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{dz}{d\tau} = -z^2 - \frac{3}{4} + \alpha(\tau) z. \quad (38)$$

Аналогічно поведінці $\gamma = \gamma(\tau)$, асимптотично (при $\tau \rightarrow \infty$) $\alpha(\tau) \rightarrow \alpha_0$, де $\alpha_0 = \text{const}$. Як і у випадку знаходження величини γ_0 , значення α_0 визначається умовою дотику графіка швидкості $dz/d\tau$ як функції z осі абсцис:

$$-z^2 - \frac{3}{4} + \alpha z = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-z^2 - \frac{3}{4} + \alpha z\right) = 0. \quad (40)$$

З рівнянь (39), (40) знаходимо $\alpha_0 = 3^{1/2}$, абсциса точка дотику («запираюча» точка для точок, що рухаються справа наліво вздовж осі z) $z_0 = 3^{1/2}/2$. Тоді асимптотично (при $\tau \rightarrow \infty$)

$$\frac{d(1/\varepsilon)}{d\tau} \rightarrow 3^{1/2}, \quad \varepsilon^2(\tau) \rightarrow \frac{1}{3\tau^2}. \quad (41)$$

При цьому

$$3^{1/2} \frac{dz}{d(\ln \tau)} \rightarrow -\left(z - \frac{3^{1/2}}{2}\right)^2, \quad (42)$$

тобто швидкість $dz/d(\ln \tau)$ асимптотично обертається на нуль в «запираючій» точці $z_0 = 3^{1/2}/2$.

Таким чином, при достатньо великих τ уточненим значенням $\gamma(\tau)$ буде

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \left(1 - 1/3\tau^2\right), \quad (43)$$

а уточнене положення «запираючої» точки на осі u

$$u_0(\tau) = 3/2 + z_0 \varepsilon(\tau) = 3/2 + 1/2\tau. \quad (44)$$

З рівнянь (26), (43) випливає

$$\frac{3dt}{dx^3} = \gamma(\tau) = \gamma_0(1 - 1/3 \tau^2), \quad (45)$$

де $\tau = \ln x^2$ (формула (23)) і відповідно

$$x^3(t) = \frac{4}{9} t \left[1 + \frac{3}{4(\ln t)^2} \right]. \quad (46)$$

Повертаючись до розмірних змінних (критичному радіусу виділення $R^*(t)$ і часу t), з формули (46) одержимо

$$R^{*3} = \frac{4}{9} \Gamma_B D t \left\{ 1 + \frac{3}{4 \left[\ln \left(\Gamma_B D t / R_0^{*3} \right) \right]^2} \right\}. \quad (47)$$

З формул (45), (47) видно, що основне наближення $\gamma(\tau) = \gamma_0$ і відповідно формула

$$R^{*3} = \frac{4}{9} \Gamma_B D t = \frac{4}{9} \frac{\Gamma_B D_{B\infty} n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0} t \quad (48)$$

справедливі за умови $1/3 \tau^2 \ll 1$, тобто

$$\left[\ln \left(\Gamma_B D t / R_0^{*3} \right) \right]^2 \gg 1. \quad (49)$$

Пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі асимптотично (при $t \rightarrow \infty$) поводить себе наступним чином

$$\Delta_B(t) = \left(\frac{3}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Gamma_B^2 h K_0}{D_{B\infty} n_{B\infty} \omega \delta} \right)^{1/3} t^{-1/3}. \quad (50)$$

Зазначимо, що з формул (23) і (48) впливає явна залежність $\tau = \tau(t)$:

$$\tau(t) = 2 \ln \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{\Gamma_B D_{B\infty} n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0} t \right)^{1/3} \frac{1}{R_0^*} \right]. \quad (51)$$

Поза околу «запираючої» точки $u_0 = 3/2$ в рівнянні (25) можна покласти $\gamma = \gamma_0 = 27/4$ і тоді

$$\frac{du}{dt} = V(u), \quad (52)$$

де

$$V(u) = - \left(u - \frac{3}{2} \right)^2 \frac{u+3}{2u^2}. \quad (53)$$

4. АСИМПТОТИКИ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИДІЛЕНЬ НОВОЇ ФАЗИ І ГУСТИНИ ВИДІЛЕНЬ НА СТАДІЇ ОВ

Функцію розподілу виділень нової фази за розмірами також будемо шукати в змінних u , τ . В цих змінних функція розподілу $\phi(u, \tau)$ зв'язана з $f(\rho, t)$ співвідношенням

$$\phi(u, \tau) du = f(\rho, t) d\rho = x f(\rho, t) du, \quad (54)$$

звідки

$$f = \frac{\phi(u, \tau)}{x(\tau)}. \quad (55)$$

Кінетичне рівняння для функції розподілу $\phi(u, \tau)$ поза околу точки $u_0 = 3/2$ при $\tau \rightarrow \infty$ має вигляд

$$\frac{\partial \phi(u, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial u} [\phi(u, \tau) V(u)] = 0, \quad (56)$$

де функція $V(u)$ представлена формулою (53).

Асимптотика функції розподілу $\phi(u, \tau)$ (при $\tau \rightarrow \infty$) така

$$\phi(u, \tau) = \begin{cases} \frac{\phi(\tau - \tau(u))}{-V(u)}, & u < u_0, \\ 0, & u \geq u_0, \end{cases} \quad (57)$$

де $\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{du'}{V(u')}$,

$$\tau(u) = -\frac{8}{9} \ln(u+3) - \frac{10}{9} \ln\left(\frac{3}{2} - u\right) - \left(\frac{3}{2} - u\right)^{-1} + B, \quad (58)$$

$B \equiv 2 \ln(3e^{1/3}/2^{5/9})$, $\tau(0) = 0$, $\tau(u_0 - 0) = -\infty$, а ϕ – довільна диференційовна функція, яку необхідно ще визначити.

Функція розподілу справа від точки u_0 при $\tau \rightarrow \infty$ визначається точками, що приходять сюди з нескінченно віддаленої області і такими, що відповідають виділенням на «хвості» їх початкового (при $\tau = 0$) розподілу. Оскільки число виділень в цьому розподілі швидко (фактично, експоненціально), спадає з ростом їх розмірів, то функція розподілу в області $u > u_0$ (поза околом точки u_0) прямує при $\tau \rightarrow \infty$ до нуля.

Для визначення функції ϕ скористуємося законом збереження речовини (30), який запишемо у вигляді

$$1 - \frac{\Delta_{B0}}{Q} \exp(-\tau/2) = \kappa (\exp \tau) \int_0^\infty \phi(u, \tau) u^2 du. \quad (59)$$

Оскільки при $\tau \rightarrow \infty$ $\exp(-\tau/2) \rightarrow 0$, а функція $\phi(u, \tau)$ має вигляд (57), отримуємо наступне асимптотичне рівняння для ϕ

$$1 = \kappa (\exp \tau) \int_0^{u_0} \phi(\tau - \tau(u)) \left[\frac{u^2}{-V(u)} \right] du. \quad (60)$$

Вираз в правій частині рівності (60) може бути незалежною від τ величиною, тільки якщо функція ϕ має вигляд

$$\phi(\tau - \tau(u)) = A \exp(-\tau + \tau(u)). \quad (61)$$

Тоді при $u < u_0$ $\phi(u, \tau) = -A[V(u)]^{-1} \exp(-\tau + \tau(u))$,

$$\phi(u, \tau) = A \exp(-\tau) \frac{(3e^{1/3}u)^2 \exp[-(3/2 - u)^{-1}]}{2^{1/9}(u+3)^{7/9}(3/2 - u)^{28/9}}. \quad (62)$$

Звідси видно, що асимптотична (при $\tau \rightarrow \infty$) поведінка

функції розподілу виділень нової фази за розмірами не залежить від вигляду початкової функції розподілу.

Запишемо $\phi(u, \tau)$ для усієї області зміни u ($0 \leq u < \infty$) у вигляді

$$\phi(u, \tau) = A \exp(-\tau) P(u), \quad (63)$$

де $P(u) \equiv -\exp[\tau(u)]/V(u)$, $u < u_0$,

$$P(u) = \frac{(3e^{1/3}u)^2 \exp[-(3/2-u)^{-1}]}{2^{1/9}(u+3)^{17/9}(3/2-u)^{28/9}}, \quad 0 \leq u < 3/2, \quad (64)$$

$$P(u) = 0, \quad 3/2 \leq u < \infty. \quad (65)$$

Функція $P(u)$ автоматично нормована на 1:

$$\int_0^{u_0} P(u) du = - \int_{u=0}^{u=u_0} \frac{du}{V(u)} \exp\left[\int_0^u \frac{du'}{V(u')}\right] = - \int_0^{-\infty} d\tau \exp \tau = 1. \quad (66)$$

Таким чином, $P(u)du$ є ймовірністю для виділення мати розмір між u та $u + du$. Графік функції $P(u)$ зображений на рис. 1 (крива 3).

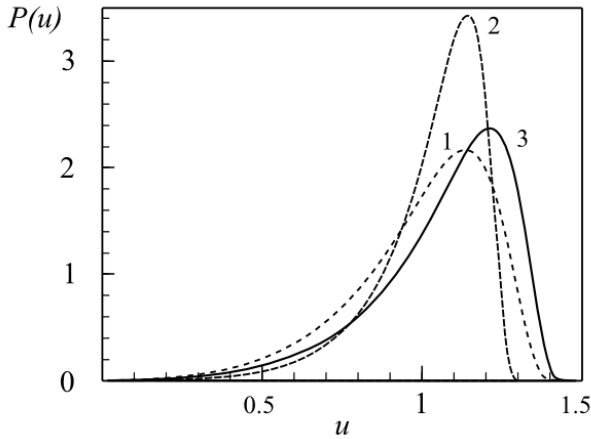


Рис. 1 – деякі функції $P(u)$, отримані в теорії ОВ: 1 – праця [11]; 2 – праця [22]; 3 – дана робота

Стала A в формулах (61)-(63) визначається оберненою підстановкою виразу (61) в рівняння (60). З урахуванням формули (64) одержимо

$$A = \left(\overline{\kappa u^2} \right)^{-1}, \quad (67)$$

де

$$\overline{u^2} = \int_0^{u_0} u^2 P(u) du \approx 1.1824. \quad (68)$$

Виразимо густину ймовірності $P(u)$ (формули (64), (65)) в других відносних змінних

$$v \equiv u/u_0 = 2u/3. \quad (69)$$

Тоді

$$P(u)du = P_1(v)dv, \quad P_1(v) = \frac{3}{2} P(u). \quad (70)$$

З формул (64), (65), (69) і (70) для $P_1(v)$ одержимо наступний аналітичний вираз

$$P_1(v) = \frac{(2e^{1/3}v)^2 \exp[-(2/3)(1-v)^{-1}]}{2^{1/9}(v+2)^{17/9}(1-v)^{28/9}}, \quad 0 \leq v < 1, \quad (71)$$

$$P_1(v) = 0, \quad 1 \leq v < \infty. \quad (72)$$

Густина виділень нової фази згідно (13), (63) і (66) буде

$$N = \int_0^\infty f(\rho, t) d\rho = \int_0^{u_0} \phi(u, \tau) du = A \exp(-\tau). \quad (73)$$

Тоді, як випливає з формул (63) і (73),

$$\phi(u, \tau) = N(\tau) P(u). \quad (74)$$

З урахуванням формул (23) і (48) з (73) маємо

$$N(t) = A \left(\frac{R_0^*}{R^*(t)} \right)^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^{4/3} AR_0^{*2} \left(\frac{\Gamma_B D_B n_{B\infty} \omega \delta}{h K_0} t \right)^{-2/3}. \quad (75)$$

В виразі (75), як випливає з формул (20) і (67),

$$AR_0^{*2} = \frac{R_0^{*2}}{\kappa u^2} = \frac{n_{B\infty} Q \omega (\delta + Cd)}{\pi h u^2}, \quad (76)$$

тобто асимптотично (при $t \rightarrow \infty$) $N(t)$ не залежить від R_0^* .

Оскільки $\bar{u} = \bar{R}/R^*$, середній радіус виділення асимптотично зростає в часі пропорційно критичному радіусу:

$$\bar{R}(t) = \bar{u} R^*(t), \quad (77)$$

де

$$\bar{u} = \int_0^{u_0} u P(u) du \approx 1.0665. \quad (78)$$

Для запису асимптотичного виразу функції розподілу виділень за розмірами в змінних R , t попередньо зауважимо, що

$$f(R, t) dR = \phi(u, \tau) du = \phi(u, \tau) \frac{dR}{R^*}, \quad (79)$$

$f(R, t) = \phi(u, \tau)/R^*$. З урахуванням вигляду $\phi(u, \tau)$ згідно з (74), одержимо

$$f(R, t) = \frac{N(t)}{R^*(t)} P\left(\frac{R}{R^*(t)}\right) = \frac{\bar{u} N(t)}{\bar{R}(t)} P\left(\frac{\bar{u} R}{\bar{R}(t)}\right). \quad (80)$$

5. АСИМПТОТИКА КОЕФІЦІЄНТА ЗАПОВНЕННЯ МІЖЗЕРЕННОЇ МЕЖІ ВИДІЛЕННЯМИ НОВОЇ ФАЗИ НА СТАДІЇ ОВ І ГРАНИЦІ ЗАСТОСОВНОСТІ ПРОВЕДЕНОГО РОЗГЛЯДУ

По аналогії з працями [23-25] введемо коефіцієнт заповнення міжзеренної межі виділеннями нової фази $Z(t)$ як площу, що покривається виділеннями на одиниці площі міжзеренної межі:

$$Z(t) \equiv \pi \int_0^{\infty} R^2 f(R, t) dR = \pi R_0^{*2} \int_0^{\infty} \rho^2 f(\rho, t) d\rho. \quad (81)$$

Ураховуючи співвідношення (68), (74) і (79), формулу (81) при $t \rightarrow \infty$ запишемо у вигляді

$$Z(t) = \pi [R^*(t)]^2 \int_0^{u_0} u^2 \phi(u, t) du = \pi [R^*(t)]^2 N(t) \bar{u}^2. \quad (82)$$

Оскільки $N(t) = A [R_0^*/R^*(t)]^2$ (див. (75)), маємо $Z = \pi A R_0^{*2} \bar{u}^2 = \text{const}$. Беручи до уваги формулу (76), остаточно одержимо

$$Z = \frac{n_{Bz} Q \omega (\delta + Cd)}{h}. \quad (83)$$

Покажемо, що такий же самий асимптотичний результат (83) випливає і з закону збереження речовини (17). Дійсно, формули (17), (18) і (27) дають

$$Q = \Delta_{B0} + \frac{N_{i0}}{n_{Bz}(\delta + Cd)} = \Delta_B(t) + \frac{N_i(t)}{n_{Bz}(\delta + Cd)}, \quad (84)$$

де $N_{i0} \equiv N_i(t)|_{t=0}$. Далі, порівняння формул (27) і (81) установлює простий зв'язок між $N_i(t)$ і $Z(t)$:

$$N_i(t) = \frac{h}{\omega} Z(t). \quad (85)$$

З урахуванням (85) закон збереження речовини (84) можна записати у вигляді

$$Q = \Delta_{B0} + \frac{hZ_0}{n_{Bz}\omega(\delta + Cd)} = \Delta_B(t) + \frac{hZ(t)}{n_{Bz}\omega(\delta + Cd)}, \quad (86)$$

де $Z_0 \equiv Z(t)|_{t=0}$. При $t \rightarrow \infty$ $\Delta_B(t) \rightarrow 0$. Тоді при $t \rightarrow \infty$ із співвідношення (86) маємо

$$\frac{hZ(t)}{n_{Bz}\omega(\delta + Cd)} = Q, \quad (87)$$

звідки, природно, випливає формула (83).

Таким чином, із закону збереження речовини (17) виходить такий же самий асимптотичний вираз для $Z(t)$, як і при безпосередньому обчисленні коефіцієнта заповнення з відшуканою функцією розподілу $\phi(u, t)$ (формула (82)).

Повне число атомів домішки у виділеннях всіх розмірів на одиниці площі міжзеренної межі при $t \rightarrow \infty$ у відповідності з формулами (83) і (85) дорівнює

$$N_i = n_{Bz} Q (\delta + Cd), \quad (88)$$

що також випливає з закону збереження речовини у формі (84).

Зупинимося на завершенні на питанні про границю застосовності знайдених формул. Як впливає з попереднього аналізу (див. формули (23), (43)), наведені асимптотичні вирази справедливі за умови

$$3\tau^2 = 3(\ln x^*)^2 = 12 \left(\ln \frac{R^*(t)}{R_0^*} \right)^2 \gg 1. \quad (89)$$

Вважаємо, що ця умова виконується при

$$12 \left(\ln \frac{R^*(t)}{R_0^*} \right)^2 \geq 10, \quad \ln \frac{R^*(t)}{R_0^*} \geq \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2}, \quad (90)$$

тобто при $R^*(t)/R_0^* \geq 2.4915$, $\bar{R}(t)/R_0^* \geq 2.6572$ ($\bar{R}(t)$ і $R^*(t)$ зв'язані формулами (77), (78)). Зазначимо, що в одержаних нерівностях вибір початкового моменту часу $t = 0$ визначається дифузійною релаксацією \bar{R} до R^* ($\bar{R}(0) \sim R^*(0)$).

Відмітимо також, що розгляд задачі проведений в наближенні самоузгодженого середнього поля [8, 11], коли дифузійні поля окремих виділень майже не перекриваються і їх безпосередньою дифузійною взаємодією можна знехтувати (середня відстань між виділеннями $\Lambda \gg \bar{R} \ln(L_B/\bar{R})$).

6. ВИСНОВОК

Таким чином, теоретично розглянуто процес ОВ двовимірних (пласких) виділень нової фази малих розмірів ($R \ll L_B$), розташованих на міжзеренній межі, що має скінченну товщину δ , з урахуванням дифузійних потоків атомів домішки з глибини зерна характерного розміру d ($d \gg R$, $d \gg \delta$) до міжзеренної межі. Вважається, що ріст виділень лімітується дифузією атомів домішки в міжзеренній межі ($D_B/\beta_B \ll RK_0(R/L_B)$); в цьому випадку швидкість росту окремого виділення має вигляд (7), (10). Як і в працях [8, 11] вважається, що ріст виділень відбувається з самоузгодженого середнього поля атомів домішки, а безпосередньою дифузійною взаємодією виділень, розташованих на близьких відстанях один від одного, можна знехтувати.

Знайдені асимптотичні (при $t \rightarrow \infty$) часові залежності критичного радіуса виділення $R^*(t)$ (формули (46)-(48)), пересичення твердого розчину атомів домішки в міжзеренній межі $\Delta_B(t)$ (формула (50)), густини виділень $N(t)$ (формули (75), (76)), функції розподілу виділень за розмірами $f(R, t)$ (формули (64), (65), (80)), коефіцієнта заповнення міжзеренної межі виділеннями Z (формула (83)), повного числа атомів домішки в виділеннях на одиниці площі міжзеренної межі N_i (формула (88)). Показано, що асимптотично середній радіус виділення зростає пропорційно критичному радіусу: $\bar{R}(t) = 1.0665 \times R^*(t)$ (формули (77), (78)), а асимптотична поведінка функції розподілу виділень нової фази за розмірами не залежить від вигляду початкової функції розподілу.

Обговорені границі застосування проведеного розгляду (див. нерівності (89), (90) і супроводжувальний текст до кінця розділу 5).

ПОДЯКА

Автор висловлює подяку академіку НАН України В.Ю. Сторіжку за підтримку тематики даної роботи.

Оствальдово созревание выделений малых размеров, расположенных на межзеренной границе, рост которых лимитируется диффузией

А.В. Коропов

Институт прикладной физики НАН Украины, ул. Петропавловская, 58, 40000 Сумы, Украина

Теоретически рассмотрено оствальдово созревание двумерных выделений новой фазы малых размеров, расположенных на межзеренной границе конечной толщины, с учетом диффузионных потоков атомов примеси из глубины зерна к межзеренной границе. Считается, что рост выделений лимитируется диффузией атомов примеси в межзеренной границе. Найдены асимптотические временные зависимости среднего и критического радиусов выделения, пересыщения твердого раствора атомов примеси в межзеренной границе, функции распределения выделений по размерам, плотности выделений, коэффициента заполнения межзеренной границы выделениями. Обсуждаются пределы применимости проведенного рассмотрения.

Ключевые слова: Пересыщенные твердые растворы, Диффузионный распад, Выделения новой фазы, Оствальдово созревание, Реальные кристаллы, Макродефекты, Границы зерен, Диффузия по границам зерен, Стареющие металлические сплавы, Реакторные конструкционные материалы, Радиационная стойкость, Диффузионный рост, Вакансионные поры.

Ostwald Ripening of Diffusion-Limited Small-Size Precipitates at Grain Boundaries

A.V. Koropov

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
58, Petropavlivska Str., 40000 Sumy, Ukraine

The paper describes a theoretical study of the Ostwald ripening of two-dimensional small-size precipitates of a newly formed phase at the grain boundary of finite thickness, taking into account the diffusion of impurity atoms from the grain interior to the grain boundary. The precipitate growth is believed to be limited by the impurity-atom diffusion in the grain boundary. The asymptotic time dependences are found for the average and critical precipitate radius, supersaturation of solid solution of impurity atoms in the grain boundary, precipitate size distribution function, precipitate density, and for the factor of grain boundary filling with precipitates. A discussion of the limits of validity of obtained results is given.

Keywords: Supersaturated Solid Solutions, Diffusion Decomposition, Precipitates, Ostwald Ripening, Real Crystals, Macrodefects, Grain Boundaries, Grain Boundary Diffusion, Ageing Metal Alloys, Reactor Constructional Materials, Radiation Strength, Diffusion Growth, Vacancy Pores.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Я.Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **12**, 525 (1942).
2. Я.И. Френкель, *Введение в теорию металлов* (Ленинград: Наука: 1972).
3. M. Kahlweit, *Adv. Colloid Interfac.* **5**, 1 (1975).
4. S.C. Jain, A.E. Hughes, *J. Mater. Sci.* **13**, 1611 (1978).
5. А.А. Чернов, *Современная кристаллография. Т.3 Обработка кристаллов*, 7 (Москва: Наука: 1980).
6. R.D. Vengrenovitch, *Acta Metall.* **30**, 1079 (1982).
7. В.А. Шнейдман, *ЖЭТФ* **91**, 520 (1986) (V.A. Shneideman, *JETP* **91**, 520 (1986)).
8. В.В. Слезов, В.В. Сагалович, *УФН* **151** №1, 67 (1987) (V.V. Slezov, V.V. Sagalovich, *Sov. Phys. Usp.* **30**, 23 (1987)).
9. И.М. Финшман, *УФН* **155** №6, 329 (1988) (I.M. Fishman, *Sov. Phys. Usp.* **31**, 561 (1988)).
10. W. Ostwald, *Zs. Phys. Chem.* **34**, 495 (1900).
11. I.M. Lifshitz, V.V. Slyozov, *J. Phys. Chem. Solids* **19**, 35 (1961).
12. C. Wagner, *Zs. Elektrochem.* **65**, 581 (1961).
13. H. Kreye, *Zs. Metallkunde* **61**, 108 (1970).
14. A.J. Ardell, *Acta Metall.* **20**, 601 (1972).
15. Р.Д. Венгреневич, *ФММ* **39**, 436 (1975).
16. Р.Д. Венгреневич, Ю.В. Гудыма, С.В. Ярема, *ФММ* **91**, 16 (2001) (R.D. Vengrenovich, Yu.V. Gudyima, S.V. Yarema, *Phys. Met. Metallogr.* **91**, 228 (2001)).
17. Р.Д. Венгреневич, А.В. Москалюк, С.В. Ярема, *ФТТ* **49**, 13 (2007) (R.D. Vengrenovich, A.V. Moskaluyk, S.V. Yarema, *Phys. Solid State* **49**, 11 (2007)).
18. Н.О.К. Kirchner, *Metall. Trans.* **2**, 2861 (1971).
19. Дж. Мартин, Р. Доэрти, *Стабильность микроструктуры металлических систем* (Москва: Атомиздат: 1978) (J.W. Martin, R.D. Doherty, *Stability of Microstructure in Metallic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press: 1976)).
20. С.А. Кукушкин, А.В. Осипов, *УФН* **168**, 1083 (1998) (S.A. Kukushkin, A.V. Osipov, *Phys. Usp.* **41**, 983 (1998)).
21. А.В. Коропов, В.В. Слезов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No2, 63 (1982).
22. А.В. Коропов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No6, 50 (1987).
23. А.В. Коропов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No5, 55 (1989).
24. А.В. Коропов, В.В. Сагалович, *Поверхность. Физика, химия, механика* No2, 17 (1990).
25. А.В. Коропов, П.Н. Остапчук, В.В. Слезов, *ФТТ* **33**, 2835 (1991) (A.V. Koropov, P.N. Ostapchuk, V.V. Slezov, *Sov. Phys. Solid State* **33**, 1602 (1991)).
26. Р.Д. Венгреневич, Б.В. Иванський, А.В. Москалюк, *УФЖ* **53**, 1101 (2008) (R.D. Vengrenovich, B.V. Ivanskyi, A.V. Moskaluyk, *Ukr. J. Phys.* **53**, 1101 (2008)).
27. Р.Д. Венгреневич, Б.В. Иванський, А.В. Москалюк, *ФХТТ* **10**, 19 (2009).
28. A. Markworth, *Metall. Trans.* **4**, 2651 (1973).

29. П.Н. Остапчук, В.В. Слезов, В.В. Сагалович, *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение*, вып. **5(28)**, 27 (1983).
30. А.В. Коропов, С.А. Кукушкин, Д.А. Григорьев, *ЖТФ* **69** No7, **53** (1999) (A.V. Koropov, S.A. Kukushkin, D.A. Grigor'ev, *Tech. Phys.* **44**, **786** (1999)).
31. A.D. Brailsford, P. Wynblatt, *Acta Metall.* **27**, 489 (1979).
32. Р.Д. Венгреневич, Б.В. Иванский, А.В. Москалюк, *ЖЭТФ* **131**, **1040** (2007) (R.D. Vengrenovich, B.V. Ivanski, A.V. Moskalyuk, *J. Exp. Theor. Phys.* **104**, **906** (2007)).
33. А.М. Гусак, Г.В. Лупенко, *Металлофиз. новейшие технол.* **25**, 381 (2003) (A.M. Gusak, G.V. Lutsenko, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **25**, 381 (2003)).
34. М.О. Пасичний, А.М. Гусак, *Металлофиз. новейшие технол.* **27**, 1001 (2005) (M.O. Pasichny, A.M. Gusak *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **27**, 1001 (2005)).
35. А.С. Ширинян, Н.П. Кудин, *Металлофиз. новейшие технол.* **29**, 1537 (2007) (A.S. Shirinyan, N.P. Kudyn, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.* **29**, 1537 (2007)).
36. T. Mukherjee, W.E. Stumpf, C.M. Sellars, W.J.McG. Tegart, *J. Iron and Steel Institute* **207**, 621 (1969).
37. К.В. Чуистов, *Старение металлических сплавов* (Киев: Наук. думка: 1985).
38. В.Н. Воеводин, И.М. Неклюдов, *Эволюция структурно-фазового состояния и радиационная стойкость конструкционных материалов* (Киев: Наук. думка: 2006).
39. В.Н. Воеводин, И.М. Неклюдов, *Вісник Харківського університету* No**746**. Серія фізична «Ядра, частинки, поля» вип. **4(32)**, 3 (2006).
40. И.М. Неклюдов, В.Н. Воеводин, *Известия высших учебных заведений. Физика* No**4**, 61 (2008).
41. J.C. Fisher, *J. Appl. Phys.* **22**, **74** (1951).
42. Ю.М. Мишин, И.М. Разумовский, *ФММ* **53**, 756 (1982).
43. Б.С. Бокштейн, Ч.В. Копецкий, Л.С. Швиндлерман, *Термодинамика и кинетика границ зерен в металлах* (Москва: Металлургия: 1986).
44. Б.С. Бокштейн, А.Б. Ярославцев, *Диффузия атомов и ионов в твердых телах* (Москва: МИСИС: 2005).
45. А.В. Коропов, *Вісник СумДУ. Серія: Фізика, математика, механіка* No**8(80)**, 78 (2005).
46. А.В. Коропов, *Вісник СумДУ. Серія: Фізика, математика, механіка* No**9(93)**, 49 (2006).
47. А.В. Коропов, *ФТТ* **50**, **2093** (2008) (A.V. Koropov, *Phys. Solid State* **50**, **2184** (2008)).
48. А.В. Коропов, *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования* No**8**, 79 (2011) (A.V. Koropov, *J. Surf. Investig.-X-Ra.* **5** No**4**, **780** (2011)).
49. А.В. Коропов, *Ж. Нано- Електрон. Фіз.* **2** No**4**, **31** (2010) (A.V. Koropov, *J. Nano- Electron. Phys.* **2** No**4**, **117** (2010)).
50. А.В. Коропов, *ЖТФ* **81** No**12**, **83** (2011) (A.V. Koropov, *Tech. Phys.* **56**, **1781** (2011)).
51. А.В. Коропов, *Чотирнадцята Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. Матеріали конф. Т. 1*, 245 (Київ: НТУУ «КПІ»: 2012).
52. *Справочник по специальным функциям* (Ред. М. Абрамовиц, И. Стиган) (Москва: Наука: 1979) (*Handbook of Mathematical Functions* (Eds. M. Abramowitz, I.A. Stegun) (New York: Dover: 1971)).